КОЛЕБАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Юсупов Мажид,
Рузиева Соҳибжамол
Ташкентский экономический и педагогический институт
E-mail: ysupovmajid1956@mail.ru

Аннотация: Рассмотрены механическая система с двумя степенями свободы, которые состоит из двух однородных цилиндров и двух линейно вязкоупругих пружин. Реологических свойств материала пружины учтены принципам Больцмана-Вольтерры. Получены математические модели рассматриваемой задачи, которые описываются линейным интегро-дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: ядро релаксации, интегро-дифференциальное уравнение, кинетическая энергия, потенциальная энергия, угловая скорость, квадратурная формула.

Annotatsiya: Ikkita bir xil silindr va ikkita chiziqli viskoelastik prujinadan iborat ikki erkinlik darajasiga ega mexanik tizim ko'rib chiqiladi. Prujina materialining reologik xususiyatlari Boltzmann-Volterra tamoyillari yordamida hisobga olinadi. Muammoning matematik modellari chiziqli integro-differentsial tenglamalar bilan tavsiflangan holda olinadi.

Kalit so'zlar: relaksatsiya yadrosi, integro-differentsial tenglama, kinetik energiya, potensial energiya, burchak tezligi, kvadratura formulasi.

Annotation: A mechanical system with two degrees of freedom consisting of two homogeneous cylinders and two linearly viscoelastic springs is considered. The rheological properties of the spring material are taken into account by the Boltzmann-Volterra principles. Mathematical models of the problem under consideration are obtained, which are described by linear integro-differential equations.

Key words: relaxation kernel, integro-differential equation, kinetic energy, potential energy, angular velocity, quadrature formula.

Введение. Многие задачи оценки динамических свойств технических объектов при действии на них вибрационных нагрузок решаются при использовании расчётных схем в виде механических колебательных систем с несколькими степенями свободы, что даёт определённые возможности в оценке форм динамических взаимодействий и определении требований к соответствующим структурным решениям, которые предопределяются свойствами составляющих элементов.

Обзор литературы.

Производственная деятельность в большинстве отраслей промышленного производства обеспечивается работой различного рода технологических машин и транспортных средств[1]. Эксплуатация машин, оборудования, механизмов, аппаратуры и приборов в условиях необходимости обеспечения высокой производительности часто сопровождается значительными динамическими нагрузками, вибрационными процессами и проявлениями ударных взаимодействий элементов машин[2]. Обеспечение надёжности и безопасности эксплуатации машин требует на всех стадиях их жизненного цикла серьёзного внимания к вопросам соблюдения определённых ограничений на параметры динамических состояний технических объектов, разработки способов и средств оценки контроля и управления процессами динамических взаимодействий [3].

Задача осложняется при исследовании переходных процессов в наследственно-деформируемых системах. Главную трудность здесь заключается в том, чтобы найти решения системы слабо-сингулярных интегро-дифференциальных уравнение при заданных начальных условиях и произвольных внешних нагрузках. Важный практический интерес представляют исследование поведения систем при импульсных нагрузках и свободных затухающих колебаниях, вызванных заданными начальными условиями.

Методология исследования

Постановка и математической модели задачи. Рассматривается механическая система с двумя степенями свободы, которые состоит из двух однородных цилиндров и двух линейно вязкоупругих пружин. Цилиндр A массой m_A может кататься без проскальзывания и трения качения по горизонтальной поверхности. Его ось соединена с неподвижной стенкой горизонтальной пружиной 1 с жёсткостями c_1. Ободы цилиндров связаны нитью и пружиной 2 с жёсткостями c_2. Цилиндр B массой m_B вращается вокруг неподвижной оси. В качестве первой обобщенное координаты выбираем смещение x_1 цилиндра A, а в качестве другой смещение x_2 цилиндра B [2,3].

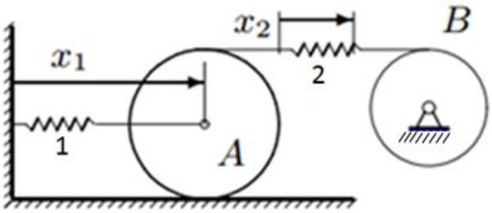

Рис.1. Механическая система с двумя степенями свободы

Кинетическую энергию системы, состоящую из суммы кинетических энергий двух тел: $T = T_A + T_B$, выражаем через обобщенные скорости $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$. Кинетическая энергия однородного цилиндра A, катящегося без проскальзывания по неподвижной плоскости, вычисляется по формуле:

$$T_A = \frac{3m_A\dot{x}_1^2}{4}.$$

Кинетическая энергия вращения цилиндра B вокруг неподвижной оси имеет вид

$T_B = \frac{J_B\omega_B^2}{2}$, где $J_B = \frac{m_B R_B^2}{2}$.

Левый конец пружины 2 движется со скоростью $2\dot{x}_1$, скорость удлинения пружины $\dot{x}_2$. Скорость правого конца пружины равна скорости точки обода цилиндра B и равна сумме $2\dot{x}_1 + \dot{x}_2$, отсюда $\omega_B = \frac{2\dot{x}_1+\dot{x}_2}{R_B}$ — угловая скорость вращения цилиндра B. Таким образом, получаем: $T_B = \frac{m_B(2\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2}{4}$.

Кинетическая энергия всей системы

$$T = \frac{3m_A\dot{x}_1^2}{4} + \frac{m_B(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2}{4}.$$

Записываем систему уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q_2,$$

где $Q_1 = -c_1(1 - R_1^*)x_1(t)$ и $Q_2 = -c_2(1 - R_2^*)x_2(t)$ обобщенные силы, R_i^* —интегральные операторы с ядрами релаксаций имеющие слабосингулярную особенности типа Абеля $R_i(t) = \varepsilon_i e^{-\beta_i t} t^{\alpha_i - 1}$, $(\, i = 1,2)$ [4]:

$$R_i^* f(t) = \int_0^t R_i(t-\tau)\, f(\tau) d\tau.$$

Подставив полученные значения кинетической и потенциальной энергии в уравнения Лагранжа, находим интегродифференциальные уравнения колебаний механической системы:

$$\begin{cases}(2m_B + 1{,}5m_A)\ddot{x}_1 + m_B\ddot{x}_2 + c_1(1 - R_1^*)x_1(t) = 0 \\ m_B\ddot{x}_1 + 0{,}5m_B\ddot{x}_2 + c_2(1 - R_2^*)x_2(t) = 0\end{cases} \qquad (1)$$

Предположим, что:

$$x_1(0) = \delta; \quad \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0. \qquad (2)$$

Методы решения. Введя в (1) следующие безразмерные величины:

$\frac{x_1}{\delta}$; $\frac{x_2}{\delta}$; $\frac{t}{t_x}$

и сохраняя при этом прежние обозначения и принимая $\omega_1^2 = \frac{c_1 t_x^2}{2m_B+1{,}5m_A}$, $\omega_2^2 = \frac{c_2 t_x^2}{m_B}$, $p = \frac{m_B}{2m_B+1{,}5m_A}$ получим

$$\begin{cases}\ddot{x}_1 + p\ddot{x}_2 + \omega_1^2(1 - R_1^*)x_1(t) = 0 \\ \ddot{x}_1 + 0{,}5\ddot{x}_2 + \omega_2^2(1 - R_2^*)x_2(t) = 0\end{cases} \qquad (3)$$

Система уравнений (3) решается методами основанной на использование квадратурной формулы [5,6]. Два раза интегрируя по t системы уравнений (3), на интервале $[0;\ t]$ и учитывая начальные условия (2) имеем:

$$\begin{cases}x_1(t) + px_2(t) - \delta + \omega_1^2 \int_0^t G_1(t-s)x_1(s) = 0 \\ x_1(t) + 0{,}5x_2(t) - \delta + \omega_2^2 \int_0^t G_2(t-s)x_2(s)ds = 0\end{cases},$$

где

$$G_p(t-s) = t - s - \int_0^{t-s} (t-s-\tau) R_p(\tau) d\tau\,; \quad R_p(t) = \varepsilon_p e^{-\beta_p t} t^{\alpha_p - 1};\ p = 1{,}2.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_1(t) = \delta + \dfrac{2p\omega_2^2}{1-2p} \cdot \displaystyle\int_0^t G_2(t-s) x_2(s) ds - \dfrac{\omega_1^2}{1-2p} \cdot \displaystyle\int_0^t G_1(t-s) x_1(s) \\ x_2(t) = \dfrac{2\omega_1^2}{1-2p} \cdot \displaystyle\int_0^t G_1(t-s) x_1(s) - \dfrac{2\omega_2^2}{1-2p} \cdot \displaystyle\int_0^t G_2(t-s) x_2(s) ds \end{cases},$$

Принимая $t_n = n \cdot \Delta t,\ (i = 0,1,2, \dots)$ в последние выражение и заменяя интегрaли квадратурными формулами трапеции, для определения $x_{1n} = x_1(t_n)$, $x_{2n} = x_2(t_n)$, имеем следующие реккурентные соотношение:

$$\begin{cases} x_{1n}(t) = \delta + \dfrac{2p\omega_2^2}{1-2p} \cdot \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_i G_2(t_n - t_i) x_{2i} - \dfrac{\omega_1^2}{1-2p} \cdot \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_i G_1(t_n - t_i) x_{1i} \\ x_{2n}(t) = \dfrac{2\omega_1^2}{1-2p} \cdot \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_i G_1(t_n - t_i) x_{1i} - \dfrac{2\omega_2^2}{1-2p} \cdot \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_i G_2(t_n - t_i) x_{2i} \end{cases}, \quad (4)$$

где $A_0 = A_n = \frac{\Delta t}{2};\ A_j = \Delta t, j = \overline{1, n-1};$

$$G_p(t_n - t_i) = t_n - t_i - \int_0^{t_n - t_i} (t_n - t_i - \tau) R_p(\tau) d\tau\,; \quad p = 1{,}2.$$

Анализ материала и результаты исследования

Для проведения, вычислительного расчёта разработана компьютерная программа, которая полученные результаты отражаются в виде графиков. При расчёта использована следующие исходные данные: $\delta = 0{,}01;\ \omega_1^2 = 0{,}8;\ \omega_2^2 = 4{,}0;\ p = 0{,}24;\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}25;\ \beta_1 = \beta_2 = 0{,}05;\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}025.$

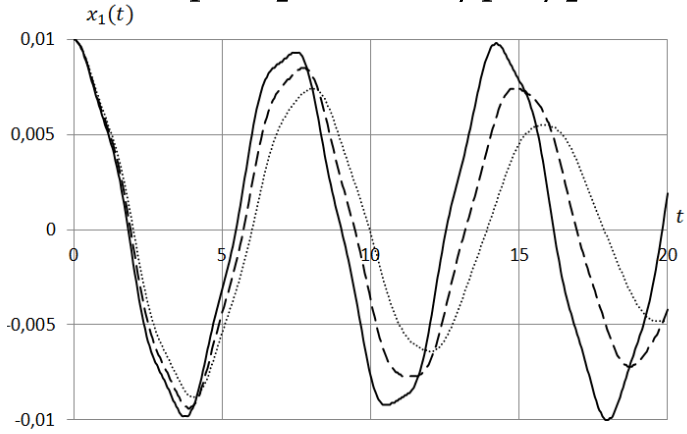

Рис. 2. Влияние вязкости пружины на смещение цилиндра A.

На рис.2 показано влияние вязкоупругих свойств материала пружины на смещение цилиндра A. Здесь и в дальнейшем, сплошной линией обозначен график для упругой ($\varepsilon_i = 0$), пунктирной линией ($\varepsilon_i = 0{,}025$) и точечной линией ($\varepsilon_i = 0{,}05$) для вязкоупругой пружены. Из графика видно, что за счёт вязкости материала пружины, смещение цилиндра A уменьшается и происходит сдвиг фазы. За счёт вязкости форма изменение смещение с течением времени становится более гладкими.

На рис.3 показано влияние вязкоупругих свойств материала пружины на смещение цилиндра B. Из графика видно, что за счёт вязкости материала пружины, смещение цилиндра A от положения равновесия уменьшается и происходит сдвиг фазы направо.

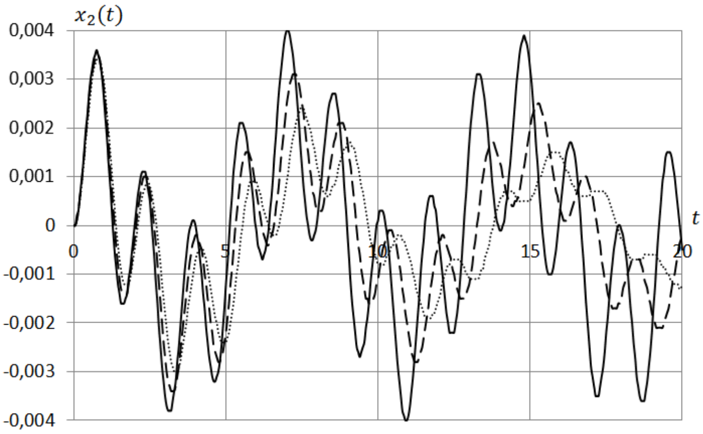

Рис. 3. Влияние вязкости пружины на смещение цилиндра B.

Выводы.

Использование схем, допускающих получение решения рассматриваемой задачи в замкнутом виде или с помощью хорошо изученных алгоритмов типа (4), представляет собой весьма большой интерес. Полученные результаты позволяют сделать вывод о целесообразности учета наследственно-деформируемых свойств пружины, для уменьшения амплитуда колебаний механический систем с двумя степенями свободы при переходных процессах.

ЛИТЕРАТУРА

Елисеев, С.В. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем / С.В. Елисеев, А.И. Артюнин. - Новосибирск: Наука, 2016. - 459 с.

Щепетильников В.А. Уравновешивание механизмов / В.А. Щепетильников.- М.: Машиностроение, 1982. – 256 с.

Маслов Г.С. Расчеты колебаний валов: справочник/ Г.С. Маслов. – М.: Машиностроение, 1980. – 151 с.

Работнов, Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, – 1977. – 384 с.

Бадалов Ф.Б., Эшматов Х. , Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости / / ПММ. — 1987. — Т. 51, № 5. — С. 867-871.

Abdullaev Z., Yusupov M., Mirzaev S., Noraliev N.,Kusharov Z. Dynamic dampers of vibrations of inherited-deformable systems with finite number of degrees of freedom. - International Conference on Materials Physics, Building Structures and Technologies in Construction, Industrial and Production Engineering (MPCPE 2020)