МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВИБРАЦИИ ДИСКРЕТНОЙ МАССЫ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ СИЛОВОМ ВОЗМУЩЕНИИ

Юсупов Мажид,
Маҳкамова Мухайё Бахтиёровна
к.ф.-м.н., Ташкентский экономический и педагогический институт
E-mail: ysupovmajid1956@mail.ru

Аннотация: Рассмотрены задачу нелинейные колебания одномассовой системы при силовом возбуждении вибрации, связанной с неподвижным основанием невесомой вязкоупругой пружиной. Для учёта реологических свойств материала пружины использован принцип Больцмана-Вольтерра. Получены математические модели рассматриваемой задачи, которые описываются нелинейным интегро-дифференциальным уравнениям. Разработан метода решения, основанного на использовании квадратурных формул и на её основе составлена компьютерная программа, полученные результаты которых отражаются в виде графиков. Исследованы влияние нелинейные и реологические свойства пружины на амплитуду и фаза колебаний массы.

Ключевые слова: ядро релаксации, интегро-дифференциальное уравнение, частота, амплитуда, упругость, вязкоупругость, напряжение, деформация, инерция, интегральный оператор.

Annotation: The problem of nonlinear oscillations of a single-mass system under the force excitation of vibration associated with a fixed base by a weightless viscoelastic spring is considered. The Boltzmann-Volterra principle is used to account for the rheological properties of the spring material. Mathematical models of the problem under consideration are obtained, which are described by nonlinear integro-differential equations. A solution method based on the use of quadrature formulas has been developed and a computer program based on it has been compiled, the results of which are reflected in the form of graphs. The influence of nonlinear and rheological properties of a spring on the amplitude and phase of mass oscillations is investigated.

Keywords: relaxation core, integro-differential equation, frequency, amplitude, elasticity, viscoelasticity, stress, deformation, inertia, integral operator.

Annotatsiya: Ushbu maqolada vaznsiz viskoelastik prujina yordamida sobit asosga ulangan tebranishning kuch qo'zg'alishi ostidagi bitta massali tizimning chiziqli bo'lmagan tebranishlari muammosi ko'rib chiqiladi. Boltsman-Volterra printsipi prujina materialining reologik xususiyatlarini hisobga olish uchun ishlatiladi. Muammoning matematik modellari olinadi, ular chiziqli bo'lmagan integro-differentsial tenglamalar bilan tavsiflanadi. Kvadratura formulalariga asoslangan yechim usuli ishlab chiqildi va ushbu usul asosida kompyuter dasturi yaratildi.

Natijalar grafik shaklda taqdim etildi. Prujinaning chiziqli bo'lmagan va reologik xususiyatlarining massa tebranishlarining amplitudasi va fazasiga ta'siri o'rganildi.

Kalit so'zlar: relaksatsiya yadrosi, integro-differentsial tenglama, chastota, amplituda, elastiklik, viskoelastiklik, kuchlanish, deformatsiya, inertsiya, integral operator.

Введение. Вибрирующие машины, сооружения или их составные части являются колебательными системами. Одним из важнейших признаков колебательной системы является число степеней свободы, т.е. количество независимых числовых параметров, однозначно определяющих положение всех точек системы в пространстве в любой фиксированный момент времени t.

Для решения задач выброзащиты при проектировании и эксплуатации машин, оборудования и сооружений следует иметь зависимости параметров вибрации их конструкций, возбуждаемой детерминированными и случайными динамическими воздействиями. При этом расчетная модель конструкций может быть принята дискретной или распределенной (континуальной), линейной или нелинейной.

Дискретная модель характеризуется тем, что все массы конструкции заменяются несколькими сосредоточенными массами, распределенные и диссипативные свойства конструкции также заменяются сосредоточенными элементами жесткости и неупругих сопротивлений. Динамика дискретных моделей описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями [1-3].

Производственная деятельность в большинстве отраслей промышленного производства обеспечивается работой различного рода технологических машин и транспортных средств. Эксплуатация машин, оборудования, механизмов, аппаратуры и приборов в условиях необходимости обеспечения высокой производительности часто сопровождается значительными динамическими нагрузками, вибрационными процессами и проявлениями ударных взаимодействий элементов машин. Обеспечение надежности и безопасности эксплуатации машин требует на всех стадиях их жизненного цикла серьёзного внимания к вопросам соблюдения определенных ограничений на параметры динамических состояний технических объектов, разработки способов и средств оценки контроля и управления процессами динамических взаимодействий [4].

Многие задачи статики и динамики механических систем допускают относительно простые решения, основанные на линейных дифференциальных уравнениях. Однако в ряде случаев необходим учет дополнительных влияний, вынуждающих отказаться от линейной постановки задачи и заставляющих исследовать так называемые нелинейные системы. Этой проблеме, имеющей большое практическое значение во многих областях техники [5].

Постановка задачи. Рассмотрим колебательную систему с одной степенью свободы в виде массы m, связанной с неподвижным основанием невесомой нелинейной вязкоупругой пружиной с коэффициентом жесткости С (рис. 1).

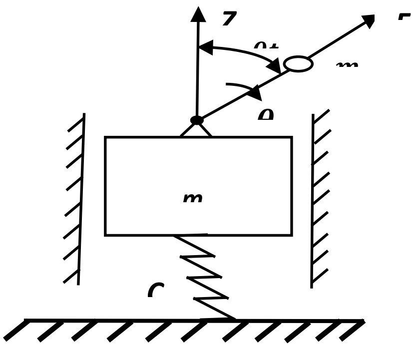

Рис.1. Динамическая модель одномассовой системы при силовом возбуждении вибрации.

На массу m действует сила инерции неуравновешенной массы $m_{\text{в}}$

$$F(t) = m_{\text{в}} e\theta^2 cos\theta t,$$

где $m_{\text{в}}$ − масса ротора машины, кг;

e −удельный дисбаланс ротора, численно равно расстоянию центра масс ротора от оси его вращения, м;

θ − угловая скорость вращения ротора, рад/с.

На массу m при ее смещении из положения равновесия на величину $Z(t)$ действуют следующие силы:

$m\ddot{Z}$ − сила инерции массы m;

$\text{C}R^*[Z(t) + \gamma Z^3(t)]$ − сила вязкоупругого сопротивления;

$\text{C}[Z(t) + \gamma Z^3(t)]$ − сила упругого сопротивления.

Где, γ −коэффициент нелинейности; R^* −интегральные оператор с ядром релаксации $R(t)$ [6]:

$$R^* f(t) = \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Из равновесия системы с учетом принципа Даламбера получим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, описывающее колебания массы:

$$m\ddot{Z}(t) + \text{C}(1 - R^*)[Z(t) + \gamma Z^3(t)] = m_{\text{в}} e\theta^2 cos\theta t \qquad (1)$$

Предположим, что:

$$Z(0) = 0; \quad \dot{Z}(0) = 0. \qquad (2)$$

Методы решения. Введя в (1) следующие безразмерные величины:

$\frac{Z}{Z_x}$; $\frac{t}{t_x}$; γZ_x^2; $\theta t_x t$

и сохраняя при этом прежние обозначения и принимая $\omega^2 = \frac{Ct_x^2}{m}$, $p = \frac{m_{\text{в}} t_x^2 \theta^2 e}{m Z_x}$ получим

$$\ddot{Z}(t) + \omega^2(1 - R^*)[Z(t) + \gamma Z^3(t)] = pcos\theta t \qquad (3)$$

Уравнение (3) решается методами основанной на использование квадратурной формулы [6-8]. Два раза интегрируя по t уравнение (3), на интервале $[0;\ t]$ и учитывая начальное условия (2) имеем:

$$Z(t)+\omega^2\int_0^t G(t-s)Z(s)[1+\gamma Z^2(s)]ds=\frac{p}{\theta^2}(1-cos\theta t)$$

где $G(t-s)=t-s-\int_0^{t-s}(t-s-\tau)R(\tau)d\tau;\quad R(t)=\varepsilon e^{-\beta t}t^{\alpha-1}$.

Принимая $t_n=n\cdot\Delta t,\ (i=0,1,2,\dots)$ в последние выражение и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеции, для определения смещение груза от положения $Z_n=Z(t_n)$, имеем следующие реккурентные соотношение:

$$Z_n=\frac{p}{\theta^2}(1-cos\theta t_n)-\omega^2\sum_{i=0}^{n-1}A_iG(t_n-t_i)\left(Z_i+\gamma Z_i^3\right),\qquad (4)$$

где $A_0=A_n=\frac{\Delta t}{2};\ A_j=\Delta t,\ j=\overline{1,n-1};$

$$G(t_n-t_i)=t_n-t_i-\int_0^{t_n-t_i}(t_n-t_i-\tau)R(\tau)d\tau.$$

Результаты и выводы. Для проведения, вычислительного расчёта разработана компьютерная программа, которая полученные результаты отражаются в виде графиков. При расчёта использована следующие исходные данные:

$\omega^2=5{,}6;\quad p=2{,}4;\quad \theta=3{,}4;\quad \beta=0{,}05;\quad \varepsilon=0{,}05;\quad \alpha=0{,}25.$

Исследованы влияние нелинейные вязкоупругие свойства пружены на смещение масса от положения статического равновесия. На рис. 2 показаны влияние параметра нелинейности γ на форме колебание массой m. Здесь $\gamma=0$ (сплошная линия) и $\gamma=2$ (пунктирная линия); $\gamma=3{,}5$ (точечная линия). Из графика видно, что с увеличением нелинейное свойство пружины, увеличивается частоты, которое приходить на сдвиг фазы на влево. За счет нелинейности пружены амплитуды колебании масс увеличивается.

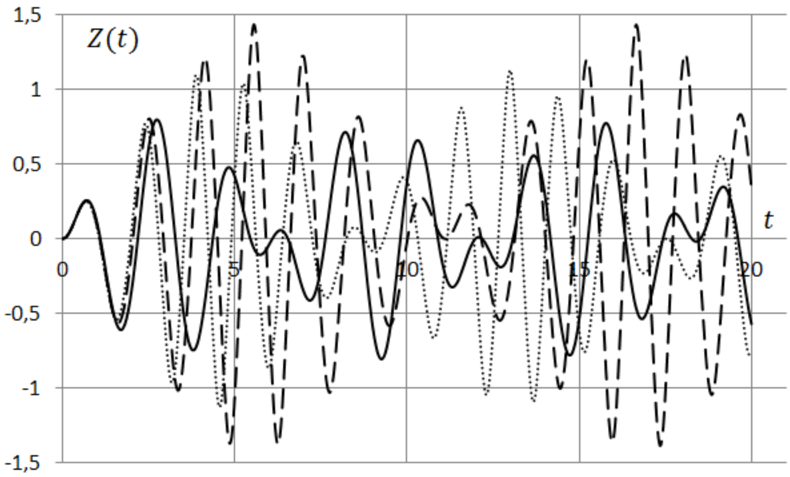

Рис. 2. Влияние параметра нелинейности γ на форме колебание массой m.

На рис 3. можно проследить влияние параметра θ на форме колебание массой m. Здесь $\theta=3{,}4$ (сплошная линия), $\theta=4$ (пунктирная линия), $\theta=5$ (точечная линия). Отходя θ нагрузки от собственной частоты, амплитуда колебаний уменьшается, и частота колебаний увеличиваются. Данном случае собственные частоты масса равны 2,37.

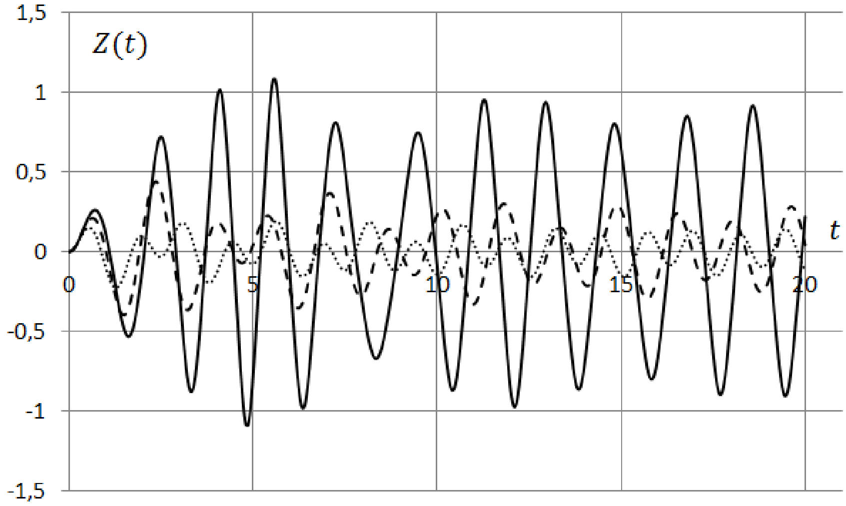

Рис. 3. Влияние параметра θ на форме колебание массой m.

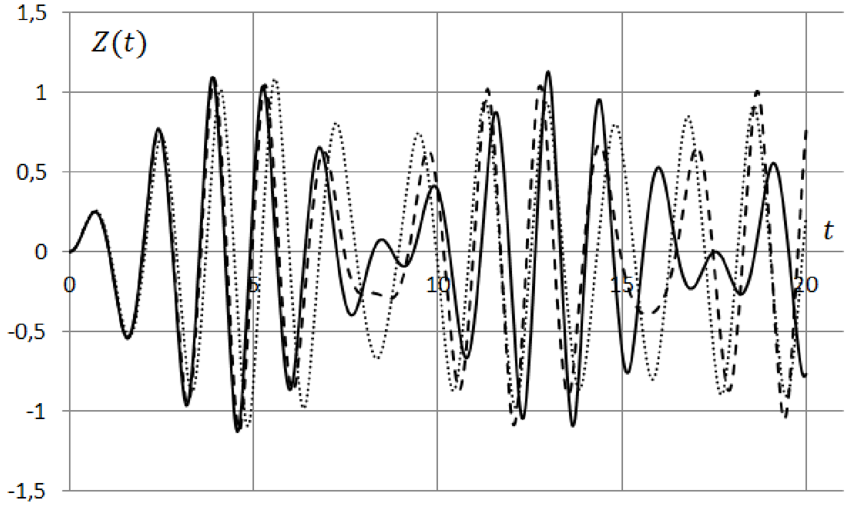

Рис. 4. Влияние параметра вязкости ε на форме колебание массой m.

Как влияет реологические параметры пружины на формы колебание? Исследован изменение реологические параметра ε (рис. 4) на форму колебаний. На графики обозначены: $\varepsilon = 0$ (сплошная линия), $\varepsilon = 0{,}01$ (пунктирная линия) и $\varepsilon = 0{,}05$ (точечная линия). Из графика видно, что малое изменение этого параметра чувствительно влияет на изменение частоты колебания. График показывает, что зависимости параметра ε и частота колебание обратно пропорционально. Это факт объясняется тем, что с увеличением параметра ε, материал пружины становится более вязким.

Использование схем, допускающих получение решения рассматриваемой задачи в замкнутом виде или с помощью хорошо изученных алгоритмов типа (4), представляет собой весьма большой интерес. Полученные результаты позволяют сделать вывод о целесообразности учета наследственно-деформируемых свойство пружины, для уменьшения амплитуда колебаний механический систем с одной степенями свободы при гармоническом силовом возмущении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куцубина Н. В., Санников А.А. Теория виброзащиты и акустической динамики машин: учебное пособие – Екатеринбург: Уральский государственный лесотехнический университет, 2014.-167 с.
2. Щепетильников В.А. Уравновешивание механизмов / В.А. Щепетильников.- М.: Машиностроение, 1982. – 256 с.
3. Маслов Г.С. Расчеты колебаний валов: справочник/ Г.С. Маслов. – М.: Машиностроение, 1980. – 151 с.
4. Елисеев, С.В. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем / С.В. Елисеев, А.И. Артюнин. - Новосибирск: Наука, 2016. - 459 с.
5. Каудерер, Г. Нелинейная механика. – М.: Наука, – 1970. – 224 с.
6. Работнов, Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, – 1977. – 384 с.
7. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х. , Юсупов М. О некоторых методах решения систем инте гродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости / / ПММ. — 1987. — Т. 51, № 5. — С. 867-871.