STATISTIKADA KICHIK KVADRATLAR USULI VA UNING TATBIQLARI

Umarov Tursunboy Sayfidin o`g`li

AIQI "Tarmoqlar iqtisodiyoti" kafedrasi asistenti
ekonometrika95@gmail.com

Annotatsiya

Mazkur maqolada eng kichik kvadrat usuli va uning tatbiqlari haqidagi masalalarni muhokama qilamiz. Odatda matematik tenglama tajriba ma'lumotlariga mos keladi. Bu ma'lumotlar asosida to`g`ri chiziq grafigi chiziladi. Ushbu usulning kamchiliklaridan biri shundaki, chizilgan to`g`ri chiziq yagona bo`lmasligi mumkin, eng kichik kvadratlar usuli berilgan ma'lumotlar asosida "eng yaxshi egri chiziq" qurishning eng tizimli prosedurasi bo`lib, amaliy masalalarda keng qo`llaniladi. Buni kompyuter dasturlarida ham osongina amalga oshirish mumkin.

Kalit so'zlar: Differentsiallanuvchi funksiya, xususiy hosila, eng kichik kvadratlar usuli, normal tenglamalar sistemasi,absolut og`ish, chetlanish,

Kirish. Amaliy statistika va iqtisodning ko`plab sohalarida biz ikkita o`zgaruvchini o`z ichiga olgan tajribalar va masalalarga duch kelamiz. Masalan, $y = \beta_0 + \beta_1 x$ Iste'mol funksiyasi bo`yicha funksiyadagi "x" ya'ni biror oilaning daromadni ortishi bilan funksiyadagi "y" oialaning oziq-ovqatiga qiladigan harajatlarini o`zgarishi ma'lum. Bu yerda $\beta_0$ va $\beta_1$ aniqlanishi kerak bo`lgan no'malum parametrlardir. Buning uchun biz oilaning daromadi va unga mos kelgan oialaning oziq-ovqatiga qiladigan harajatlarini bir nechta qiymatlar to`plamini olamiz

Asosiy masala shundaki, daromad x va xarajat y lar uchun eng yaxshi qiymatlarni topishdir. Shunday qilib, umumiy masala ma'lum bir kuzatilgan (x_i, y_i), i=1,2,…,n qiymatlar to`plamidan $x$ va $y$ o`zgaruvchilari o`rtasida mavjud bo'lishi mumkin bo'lgan tegishli munosabat yoki qonunni aniqlashdan iboratdir. $x$ va $y$ larni bog'lovchi bunday munosabat empirik qonun deb ataladi. No'malum qiymatlarni prognoz qilish uchun mos kelishi mumkin bo`lgan "eng yaxshi egri chiziq" tenglamasini topish masalasi juda dolzarbdir. Quyida egri chiziqni topishning standart usullari keltirilgan [3].

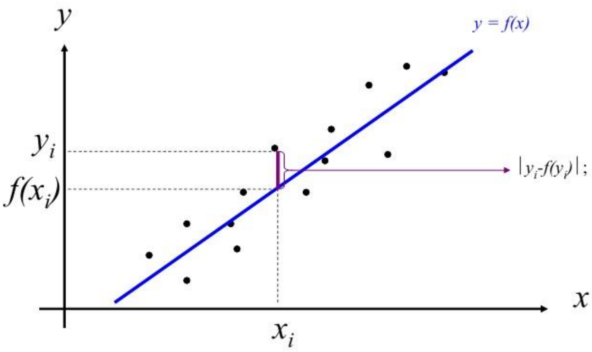
- Grafik usuli;
- O`rtachalarni guruhlash usuli;
- Momentlar usuli;
- Eng kichik kvadratlar usuli.

Asosiy qism.

Aytaylik, berilgan ma’lumotlar asosida ushbu $y = ax + b$ to`g`ri chiziqni o`tkazamiz (1-rasmga qarang). Eng yaxshi ya’ni barcha nuqlarga nisbatan optimal to`g`ri chiziqni topish uchun quyidagi ifodaga minimal qiymat beruvchi a va b topilishi talab qilinadi:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - (a + bx_i)|. \qquad (1)$$

Ushbu (1) yig`indi absolut og`ish (yoki chetlanish) deb ataladi. Yuqoridagi ifodani minimumini topishimiz uchun a va b parametrlar bo`yicha xususiy hosila olib 0 ga tenglaymiz.



$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad \text{va} \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0. \qquad (2)$$

Masalaning murakkabligi shundaki, absolut qiymat funksiyasi nolda differentsiallanuvchi emas, shuning uchun (2) sistemani yechimini topa olmasligimiz mumkin. Ushbu muammoga eng kichik kvadratlar usuli javob berib eng yaxshi mos chiziqni aniqlashni o`z ichiga oladi, qachonki xatolik mos keladigan chiziqdagi $y$ qiymatlari va berilan $y$-qiymatlar o`rtasidagi kvadratik yig`indisi bo`lsa. Demak, xatolar kvadratlarining yig`indisi quyidagicha bo`ladi.

$$S = \sum_{i=1}^{m} [y_i - (a + bx_i)]^2. \qquad (3)$$

(3) ifodaning minimumiga erishishi uchun ikkita parametrlar bo`yicha xususiy hosilalar olamiz,

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{m} [y_i - (a + bx_i)]$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=-1}^{m} x_i \cdot [y_i - (a + bx_i)]$$

Yuqoridagi ifodalarni 0 ga tenglab soddalashtirsak,

$ma + b \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} y_i$,

$ma \sum_{i=1}^{m} x_i + b \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$.

x_i va y_i miqdorlar ma’lum bo`lgani uchun, yuqoridagi ikkita tenglama (normal tenglamalar deyiladi) no’malum parametrlar $a$ va $b$ uchun yechilishi mumkin. $\frac{\partial S}{\partial a}$ va $\frac{\partial S}{\partial b}$ xususiy hosilalardan mos ravishda $a$ va $b$ parametrlar bo`yicha hosila olinsa, u holda ular berilgan nuqtalarda musbat bo`ladi. Bunda S yig`indi minimumga erishishini aniqlash mumkin. Demak

$$A = \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = -2\sum_{i=1}^{m}(-1) = 2m > 0,$$

$$B = \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = -2\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot (-x_i) = 2\sum_{i=1}^{m} x_i^2 > 0,$$

$C = \frac{\partial^2 S}{\partial b \partial a} = -2\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot (-1) = 2\sum_{i=1}^{m} x_i$,

$A \cdot B - C^2 = 4m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - 4(\sum_{i=1}^{m} x_i) \cdot (\sum_{i=1}^{m} x_i)$,

Minimum uchun $A \cdot B - C^2 > 0$ bo`lishi kerak. Bu esa quyidagi Koshi-Shvartz tengsizligidan kelib chiqadi:

$(\sum_{i=1}^{m} x_i) < \sqrt{m}(\sum_{i=1}^{m} x_i^2)^{1/2}$.

Chiziqli approksimatsiyani boshqacha usulda, ya’ni quyidagi ifodani minimallashtirish orqali ham toppish mumkin.

$S(a,b) = max_{1 \le i \le m}\{|y_i - (a + bx_i)|\}$.

Ushbu minimaks usulda odatda xatoga yo`l qo`yilgan ma’lumotlarning bir qismiga haddan tashqari vazn beradi, absolut og`ish usuli esa taxminiy qiymatdan sezilarli darjada farq qiladigan nuqtaga yetarli darajada vazn bermaydi. Eng kichik kvadratlar usuli qolgan ma’lumotlarga mos kelmaydigan nuqtaga sezilarli darajada ko`proq vazn beradi, lekin bu nuqta yaqinlashuvda to`liq ustun bo`lishiga yo`l qo`ymaydi,

Shunday qilib, yuqoridagi chiziqli $y = ax + b$ modeldagi no’malum parametrlar uchun statistik baho eng kichik kvadratlar usuli yordamida topilgan baho deyiladi va quyidagicha aniqlanadi.

$a = \frac{m\sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{i=1}^{m} y_i}{m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{m} x_i)^2}$; $b = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i y_i}{m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{m} x_i)^2}$.

Vaqtli qatorlar tahlilimizda ya’ni trend chizig’ini aniqlashda kichik kvadrat usuli juda ham qulay hisoblanadi. Eng yaxshi moslik chizig’i bu turli nuqtalarning og’ishlari chetlanishlari yig’indisi 0 ga teng bo’lgan chiziqdir[1]. Bu trend qiymatlarini hosil qilishning eng yaxshi usulidir. Bundan tashqari chetlanishlarning kvadratlari yig’indisi minimal bo’ladi. Shunday qilib, bu usul eng kichik kvadratlar usuli bo’lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) y-haqiqiy qiymat va $\hat{y}$ baholanayotgan o'zgaruvchining chetlanishlari yig'indisi 0 ga teng, ya'ni

$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i) = 0$.

2) y va $\hat{y}$ lar qiymatlarining chetlanishlari kvadratlari yig'indisi minimal bo'lsin, ya’ni

$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow$min

Prosedurasi: i) trend to'g'ri chizig'ini $y = ax + b$ deb olamiz, bu yerda y haqiqiy qiymatlar, x bu vaqt, a va b lar no'malum parametrlar.

ii) No’maum a va b parametrlarni quyidagi noreal tenglamalar sistemasi orqali baholaymiz:

[1] TA'LIM, V. R. T., & JURNALI, O. I. КОРРЕЛЯЦИЯ КОЕФФИЦИЕНТИНИ СТАТИСТИК БАҲОЛАШ.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = na + b\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases}$$

bu yerda n-berilgan ma’lumotdagi yillar soni.

iii) Vaqtni o`rta nuqtasini boshlang`ich koordinata deb qabul qilib, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ ni olamiz.

iv) $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ bo`lganidan, ikkita normal tenglamadan a va b ni aniqlaymiz.

$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y}$ va $b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Bu yerda a-bu y ning o`rtacha qiymati, $b$ esa o`zgarish tezligini ifodalaydi. Ushbu topilganlarni $y = a + bx$ trend chiziq tenglamasiga qo`shib, eng yaxshi trend to`g`ri chizig`ini hosil qilamiz.

Shunday qilib, ushbu maqolada kichik kvadratlar usuli iqtisodiyotdagi vaqtli qatorlarni tahlili va ular asosida prognozlashtirishda juda muhim ahamiyatga ega ekanligi hamda ular bog’liq masalalar muhokama etiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Das N.G. Statistical Methods, Mc Graw Hill, 2017.

2. Abdushukurov A.A. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, O’quv qo’llanma, T.: 2010.

3. Cheryl A. Willard Statistical Methods, Pyrczak Publishing, 2010.

4. Wolberg J. Data analysis using the method of least squares, Springer, 2006.

5. Robert H. Shumway, David S. Stoffer Time series analysis and its applications, Springer, 2017.